ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2016/17

COMPITO 5 SETTEMBRE 2017

Esercizio 1 (8 punti)**.** Un *gruppo di Lie* è una varietà differenziabile G tale che le operazioni algebriche seguenti siano mappe lisce:

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh, \\ G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1}. \end{aligned}$$

Un *morfismo* di gruppi di Lie è un omomorfismo $f\colon G \to H$ fra gruppi di Lie che è anche una mappa liscia.

Sia G un gruppo di Lie. Indichiamo con G^0 la componente connessa di G che contiene l'identità $e \in G$.

(1) Mostra che per ogni $g \in G$ la mappa
$$L_g\colon G \longrightarrow G, \qquad x \longmapsto gx$$
è un diffeomorfismo di G.

(2) Mostra che G^0 è un sottogruppo normale di G.

(3) Sia $f\colon G \to H$ un morfismo di gruppi di Lie connessi. Mostra che f è un rivestimento liscio $\iff$ il differenziale df_e in $e \in G$ è invertibile.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Sia L, L' due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$.

(1) Mostra che le varietà $\mathbb{R}^n \setminus L$ e $\mathbb{R}^n \setminus L'$ sono omotopicamente equivalenti se e solo se $\dim L = \dim L'$.

(2) Mostra che se $\dim L > \dim L'$ allora qualsiasi mappa continua $f\colon (\mathbb{R}^n \setminus L) \to (\mathbb{R}^n \setminus L')$ è omotopa ad una mappa costante.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Sia M una varietà orientata.

(1) Definisci la nozione di forma volume per M.

(2) Mostra che per qualsiasi M e qualsiasi numero reale $K > 0$ esiste una forma volume ω tale che
$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \omega = K.$$

Esercizio 4 (8 punti)**.** Enuncia e dimostra il Teorema di Hopf – Rinow. Puoi dare per scontato che se M è connessa e geodeticamente completa allora la mappa esponenziale è sempre suriettiva.